

Задача А. НОД для многочленов

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Для двух данных многочленов $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ ($p = 10^9 + 7$) требуется вычислить их *наибольший общий делитель* $G(x)$. Наибольшим общим делителем двух многочленов называется многочлен, который удовлетворяет следующим свойствам:

- $G(x)$ приведенный, то есть коэффициент при старшем члене равен 1;
- $G(x)$ делит оба многочлена и $P(x)$, и $Q(x)$;
- $G(x)$ имеет наибольшую степень среди всех подходящих многочленов.

Формат входных данных

В первой строке указано число t ($1 \leq t \leq 10^4$) — количество наборов входных данных.

В первой строке каждого набора указана пара чисел n и m ($1 \leq n, m \leq 1000$) — степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Во второй строке набора указаны числа $a_0, \dots, a_n$ ($0 \leq a_i \leq 10^9 + 6$).

В третьей строке набора указаны числа $b_0, \dots, b_m$ ($0 \leq b_i \leq 10^9 + 6$).

Гарантируется, что:

- $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$;
- $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$;
- $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.
- Сумма $n \cdot m$ по всем наборам входных данных не превосходит 10^6 .

Формат выходных данных

Для каждого набора входных данных выведите в отдельной строке коэффициенты многочлена $G(x)$ от младшего к старшему.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
3	1 1
2 2	2 1
1 2 1	1
2 3 1	
1 1	
10 5	
14 7	
2 2	
10 1	
13 1	

Задача В. Сколько есть корней?

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дан многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ с целочисленными коэффициентами.
Вычислите количество чисел z от 0 до $p-1$ ($p = 10^9 + 7$) таких, что $P(z)$ делится на p .

Формат входных данных

В первой строке указано число t ($1 \leq t \leq 10^4$) — количество наборов входных данных.
В первой строке каждого набора указано число n ($1 \leq n \leq 1\,000$) — степень многочлена $P(x)$.
Во второй строке перечислены числа $a_0, \dots, a_n$ ($0 \leq a_i \leq 10^9 + 6$, $a_n \neq 0$) — коэффициенты $P(x)$.
Гарантируется, что сумма n^2 по всем наборам входных данных не превосходит 10^6 .

Формат выходных данных

Выведите единственное число — ответ на задачу.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
4	1
2	2
1 2 1	5
2	0
4 6 2	
5	
120 274 225 85 15 1	
2	
7 7 7	

Задача С. Поиск корней

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дан многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ с целочисленными коэффициентами.
Найдите все z от 0 до $p - 1$ ($p = 10^9 + 7$) такие, что $P(z)$ делится на p .

Формат входных данных

В первой строке указано число t ($1 \leq t \leq 1\,000$) — количество наборов входных данных.
В первой строке каждого набора указано число n ($1 \leq n \leq 1\,000$) — степень многочлена $P(x)$.
Во второй строке перечислены числа $a_0, \dots, a_n$ ($0 \leq a_i \leq 10^9 + 6$, $a_n \neq 0$) — коэффициенты $P(x)$.
Гарантируется, что сумма n^2 по всем наборам входных данных не превосходит 10^6 .

Формат выходных данных

Для каждого набора выведите сначала количество найденных корней $P(x)$, а в следующей строке сами корни в отсортированном порядке.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
4	1
2	1000000006
1 2 1	2
2	1000000005 1000000006
2 3 1	5
5	1 2 3 4 5
999999887 274 999999782 85 999999992 1	0
2	
1 1 1	

Задача D. SQRT по хорошим модулям

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Даны n пар a_i, p_i . Гарантируется, что:

- $1 \leq a_i \leq p_i - 1$;
- p_i — простое число;
- $p_i \bmod 4 = 3$.

Для каждого i требуется найти *наименьшее* натуральное число b_i такое, что $b_i^2 \equiv a_i \pmod{p_i}$.
Не стесняйтесь использовать `__int128` для решения этой задачи.

Формат входных данных

В первой строке указано число n ($1 \leq n \leq 10^5$) — количество пар.

В последующих n строках указаны пары чисел a_i и p_i ($1 \leq a_i \leq p_i \leq 10^{18}$).

Формат выходных данных

Для каждой пары выведите искомое число b_i , если такого числа не существует, то выведите -1 .

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
3	1
1 3	-1
2 3	3
2 7	

Задача E. SQRT по плохим модулям

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 3 секунды
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Даны n пар a_i, p_i . Гарантируется, что:

- $1 \leq a_i \leq p_i - 1$;
- p_i — простое число;
- $p_i \bmod 4 = 1$.

Для каждого i требуется найти *наименьшее* натуральное число b_i такое, что $b_i^2 \equiv a_i \pmod{p_i}$.
Не стесняйтесь использовать `__int128` для решения этой задачи.

Формат входных данных

В первой строке указано число n ($1 \leq n \leq 10^5$) — количество пар.

В последующих n строках указаны пары чисел a_i и p_i ($1 \leq a_i \leq p_i \leq 10^{18}$).

Формат выходных данных

Для каждой пары выведите искомое число b_i , если такого числа не существует, то выведите -1 .

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
3	1
1 5	-1
2 5	4
3 13	

Задача F. ZP

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Самолет-самолет-самолет-самолет-самолет. Как же про тебя написать условие задачи? Как тебя впихнуть в задачу, где и близко нет самолетов? Самолет-самолет-самолет.

Несложно понять, что любой самолет можно представить в виде тройки чисел (a, b, c) . Будем говорить, что самолет удовлетворяет сертификату качества p , если выполняются следующие условия:

- $0 \leq a, b, c < p$ и числа a, b, c — попарно различные;
- $abc - 1$ и $a + b + c$ делятся на p .

Для **простого** числа p вам следует найти любую тройку чисел (a, b, c) , которая удовлетворяет сертификату качества p , либо сказать, что такой тройки не существует.

Формат входных данных

В первой строке указано число t ($1 \leq t \leq 10^5$) — количество наборов входных данных.

Каждый набор входных данных описывается единственной строкой, в которой указано единственное целое **простое** число p ($3 \leq p \leq 10^9$).

Формат выходных данных

Для каждого набора входных данных выведите либо подходящую тройку (a, b, c) , либо -1 , если такой тройки не существует.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
9	-1
3	4 2 1
7	8 4 10
11	3 1 9
13	140 16 67
223	228 3303 436
3967	228 6453 9446
16127	12228 402737 631562
1046527	2045228 1664119 13059676
16769023	

Задача G. Первообразный корень

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дано простое число p . Найдите минимальное число g , являющееся первообразным корнем по модулю p .

Формат входных данных

В единственной строке дано простое число p ($1 \leq p \leq 10^9$).

Формат выходных данных

Выведите наименьший первообразный корень по модулю p , либо -1 , если по модулю p не существует первообразного корня.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
2	1
3	2
5	2

Задача Н. Дискретное логарифмирование

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Вам требуется написать программу, которая для заданного $1 \leq a \leq 10^9 + 8$ находит минимальное неотрицательное целое число x , которое удовлетворяют уравнению:

$$13^x \equiv a \pmod{10^9 + 9}$$

Формат входных данных

В первой строке указано число t ($1 \leq t \leq 500$) — количество наборов входных данных.

В последующих t строках записаны числа $a_1, \dots, a_t$, для которых требуется решить уравнение.

Формат выходных данных

Для каждого набора входных данных в отдельной строке выведите минимальное значение x , которое является решением уравнения.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
4	0
1	1
13	2
169	976796272
5	

Замечание

Хоть это и упрощенная версия задачи, но мы не гарантируем, что решение за $O(q\sqrt{p} \log p)$ с использованием `std::map` и бинарного возведения в степень будет работать за вменяемое время. У вас остается только один выход — аккуратно реализовать $O(\sqrt{pq})$.

Также обратите внимание, что 13 — первообразный корень по модулю $10^9 + 9$, так что ответ всегда существует.

Задача I. Дискретное логарифмирование

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Вам требуется написать программу, которая для заданного $1 \leq a \leq 10^9 + 8$ находит минимальное неотрицательное целое число x , которое удовлетворяют уравнению:

$$13^x \equiv a \pmod{10^9 + 9}$$

Формат входных данных

В первой строке указано число t ($1 \leq t \leq 40\,000$) — количество наборов входных данных.

В последующих t строках записаны числа $a_1, \dots, a_t$, для которых требуется решить уравнение.

Формат выходных данных

Для каждого набора входных данных в отдельной строке выведите минимальное значение x , которое является решением уравнения.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
4	0
1	1
13	2
169	976796272
5	

Задача J. Отстойные подарки

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Родственники на день рождения подарили вам $p - 1$ число (p — простое): $1, 2, \dots, p - 1$.

Подарок отстойный, но родители вас все равно заставили разложить его красиво по полкам и поблагодарить родственников. Всего в вашей комнате есть k полок, на каждой из которых вы должны расположить $\frac{p-1}{k}$ подарков. Разложение считается хорошим, если сумма чисел на каждой из полок делится на p .

Формат входных данных

В единственной строке указана пара чисел p и k ($5 \leq p \leq 10^6$, $2 \leq k \leq p - 2$, k делит $p - 1$).

Гарантируется, что p — простое число.

Формат выходных данных

Выведите k строк, которые содержат по $\frac{p-1}{k}$ чисел.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
13 3	1 5 8 12 2 3 10 11 4 6 7 9
17 4	1 4 13 16 6 7 10 11 3 5 12 14 2 8 9 15

Задача К. Кушвинки

Имя входного файла: стандартный ввод
Имя выходного файла: стандартный вывод
Ограничение по времени: 1 секунда
Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Имеется круг из n кувшинок, пронумерованных от 0 до $n - 1$. В начальный год на кувшинке с номером i находится a_i лягушек.

Каждый год происходит следующее:

- Перед смертью каждая лягушка, находившаяся на кувшинке i , производит k детёнышей.
- Лягушата не очень то и хотят жить с трупом своего родителя, поэтому j -й детеныш очередной лягушки прыгает на кувшинку с номером $(i + j) \bmod n$.
- В следующем году все детёныши становятся взрослыми лягушками, и цикл повторяется.

Процесс продолжается t лет.

Требуется определить, сколько лягушек будет находиться на каждой из n кувшинок спустя t лет. Так числа в ответе могут быть слишком большими, то требуется вычислить их остатки при делении на $10^9 + 7$.

Формат входных данных

Первая строка содержит три целых числа n ($3 \leq n \leq 1000$), k ($1 \leq k \leq n - 1$), t ($1 \leq t \leq 10^{18}$) — количество кувшинок, детей у каждой лягушки и количество лет, которые все это происходит.

Вторая строка содержит n целых чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$ ($0 \leq a_i \leq 10^9$) — исходное количество лягушек на каждой из клеток.

Формат выходных данных

Выведите n целых чисел — количество лягушек на каждой кувшинке после t лет процесса по модулю $10^9 + 7$.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
5 2 2 1 0 0 0 0	0 0 1 2 1
3 3 123123123123 1 0 0	578039232 578039232 578039232