Задача A. Делители и степени

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Китайский профессор Глубокий Сыщик получил сообщение от мальчика Little Sasha из России. Сообщение содержало алгоритмическую задачу по теории чисел. Как не пытался профессор, он не смог ее решить, а после пары колких сообщений от Саши и вовсе стал просить помощи у своего друга профессора Чада Гэпэтэшного, но и тот не смог решить задачу.

После профессор понял, что если задачу не может решить его друг и он сам, то с этим могут справиться только российские школьники. Профессор Глубокий очень боится за судьбу Little Sasha, ведь тот написал, что у него нет рук и его лишат последней риски миса и кошки жены.

Последняя надежда профессора — это следующий промпт, который он написал для человеков:

Для каждого набора чисел (a, b, n, m) вычислите значение $\gcd(a^n, b^m) \bmod 10^9 + 7$, где gcd обозначает наибольший общий делитель.

Помогите профессору и решите эту задачу.

Формат входных данных

В первой строке входных данных находится целое число t $(1 \leqslant t \leqslant 10\,000)$ — количество наборов входных данных. Следующие t строк содержат описание наборов.

Каждый набор содержит по четыре целых числа a, b, n и m $(1 \leqslant a, b, n, m \leqslant 10^{18})$.

Формат выходных данных

Для каждого из t наборов чисел выведите значение $\gcd(a^n, b^m) \bmod 10^9 + 7$ в отдельной строке.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
5 7 3 9 5 2 4 5 2 12 18 4 5 12 18 3 10 12 18 10 3	1 16 2592 1728 5832

Задача B. Расширенный алгоритм Евклида

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Вам даны n пар натуральных чисел $\langle a_i, b_i \rangle$, для каждой из которых требуется вычислить:

- g_i — наибольший общий делитель a_i и b_i.
- x_i и y_i такие, что $a_i x_i + b_i y_i = g_i$ и x_i — минимально возможное неотрицательное число.

Формат входных данных

В первой строке содержится число n ($1 \leqslant n \leqslant 200\,000$) — количество пар.
В $(i+1)$-й строке указана пара x_i y_i ($1 \leqslant x_i, y_i \leqslant 10^{18}$).

Формат выходных данных

Для каждой пары выведите тройку чисел x_i y_i g_i.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
6 1 2 2 1 1 1 7 19 5 25 25 5	1 0 1 0 1 1 0 1 1 11 -4 1 1 0 5 0 1 5

Замечание

Использование `__int128_t` в данной задаче запрещено.

Задача C. Все обратные по модулю

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	3.5 секунд
Ограничение по памяти:	512 мегабайт

Дано простое число p. Найдите обратные по модулю p ко всем числам от 1 до $p - 1$.

Формат входных данных

Первая строка содержит число p ($1 \leqslant p \leqslant 10^8$).

Формат выходных данных

Для каждого числа от 1 до $p-1$ требуется посчитать обратное по модулю p. Так как чисел очень много, сначала выведите сумму обратных для первых 100 чисел по модулю p, потом для вторых 100 чисел по модулю p, потом для третьих 100 чисел и так далее. Если $p - 1$ не делится на 100, последнее из выведенных вами чисел будет состоять из суммы меньше, чем 100 слагаемых.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
2	1
5	0

Замечание

Обратите внимание, что сумма 100 чисел тоже берется по модулю, так что все числа, которые вы выводите не должны превышать $p - 1$.

Задача D. Сколько простых?

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Найдите количество простых чисел от n^2 до $n^2 + n$ включительно.

Формат входных данных

Первая строка содержит число n ($1 \leqslant n \leqslant 10^7$).

Формат выходных данных

Выведите количество простых чисел от n^2 до $n^2 + n$ включительно.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
2	1
5	1

Задача E. Количество взаимно простых

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	0.5 секунд
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Дано число n. Найдите количество упорядоченных пар взаимно простых чисел $x, y \leqslant n$.

Формат входных данных

В единственной строке дано одно число n ($1 \leqslant n \leqslant 10^7$).

Формат выходных данных

Выведите ответ на задачу.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
1	1
2	3
3	7

Задача F. Сумма НОДов

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Дано число n. Найдите сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} gcd(i,j)$$

Формат входных данных

В единственной строке дано одно число n $(1 \leqslant n \leqslant 10^6)$.

Формат выходных данных

Выведите ответ на задачу.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
1	1
2	5
3	12

Задача G. Сумма НОДов 2

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1.5 секунд
Ограничение по памяти:	512 мегабайт

Дано число n. Найдите сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} gcd(i,j)$$

Формат входных данных

В единственной строке дано одно число n ($1 \leqslant n \leqslant 2 \cdot 10^7$).

Формат выходных данных

Выведите ответ на задачу.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
1	1
2	5
3	12

Замечание

Гарантируется, что ответ влезает в long long.

Задача H. Посчитай GCD последовательности

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Рассмотрим всевозможные последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ длины n, которые состоят из чисел от 1 до k. Вам требуется найти суммарное значение $\texttt{gcd}(a_1, \ldots, a_n)$ по всем таким последовательностям.

Так как ответ на задачу может быть очень большим, то выведите его по модулю $10^9 + 7$.

Формат входных данных

В единственной строке указана пара чисел n и k ($2 \leqslant n \leqslant 10^5$, $1 \leqslant k \leqslant 10^5$).

Формат выходных данных

Выведите единственное число — ответ на задачу.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
3 2	9
3 200	10813692
100000 100000	742202979

Замечание

$\texttt{gcd}(1,1,1) + \texttt{gcd}(1,1,2) + \ldots + \texttt{gcd}(2,2,2) = 1 \cdot 7 + 2 = 9$.

Задача I. Армия математиков

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	0.5 секунд
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

У вас есть n математиков. Пусть интеллектуальность i-го математика равна a_i. Для некоторого k назовём $i_1, i_2, \ldots, i_k$ сходкой математиков, если $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k$ и $gcd(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}) > 1$. Эффективность этой сходки равна $k \cdot gcd(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$.

Найдите сумму эффективностей всех сходок математиков. Так как это число может быть очень большим, выведите его по модулю 1000000007 ($10^9 + 7$).

Формат входных данных

Первая строка содержит целое число n ($1 \leqslant n \leqslant 200000$) — количество математиков.

Вторая строка содержит n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \leqslant a_i \leqslant 1000000$) — интеллектуальности математиков.

Формат выходных данных

Выведите одно число — ответ.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
3 3 3 1	12
4 2 3 4 6	39

Замечание

В первом примере сходки — $1, 2, 1, 2$, так что ответ $1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 12$

Задача J. Power2

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Дан массив $a_1, \ldots, a_n$ длиной n. Введем функцию $H(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, которая определяется как наибольший общий делитель среди чисел вида $b_i \cdot b_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$. Вам требуется вычислить значение суммы:

$$x = \sum_{1 \leqslant l < r \leqslant n} H(a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r) \bmod 10^9 + 7$$

Формат входных данных

В первой строке дано число t $(1 \leqslant t \leqslant 20\,000)$ — количество наборов входных данных.

Каждый набор входных данных описывается парой строк. В первой строке содержится n $(2 \leqslant n \leqslant 10^5)$ — длина массива a, а во второй содержатся числа $a_1, \ldots, a_n$ $(1 \leqslant a_i \leqslant 10^{18})$.

Гарантируется, что сумма n по всем наборам входных данных не превосходит $200\,000$.

Формат выходных данных

Для каждого набора входных данных выведите единственное число x $(0 \leqslant x \leqslant 10^9 + 6)$ — ответ на задачу.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
4 3 1 2 3 3 2 2 2 6 8 4 2 6 3 9 4 1 3 3 1	9 12 137 22

Замечание

- $H(1, 2) + H(1, 2, 3) + H(2, 3) = 2 + (2, 3, 6) + 6 = 2 + 1 + 6 = 9.$
- $H(2, 2) + H(2, 2, 2) + H(2, 2) = 4 + 4 + 4 = 12.$
- В четвертом тестовом примере на отрезке $[1, 4]$ значение H равно 1, на отрезке $[2, 3]$ значение H равно 9, а на остальных 4 отрезках равно 3. Значит, ответ равен $1 + 9 + 4 \cdot 3 = 22$.

Задача K. Вова и странные суммы.

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Вова и Саша собрались на квартире у Юры и придумывали задачи для ЛКОШП-2024. Вова придумал очень классную задачу, но к сожалению, для ее решения ему пришлось вычислить следующую сумму:

$$\sum_{x=l}^{r} \left\lfloor \frac{ax^2}{n} \right\rfloor \bmod m$$

Вова расстроился, так как не знал эффективного алгоритма для вычисления этой суммы. Но Саша уверил Вову, что если немного пошаманить с ограничениями, то с решением этой задачи справится любой ученик кружка Тинькофф параллели X. Не подведите Сашу и решите эту задачу.

Формат входных данных

В первой строке на вход подается единственное число t ($1 \leqslant t \leqslant 100\,000$) — количество наборов входных данных.

Каждый набор входных данных описывается единственной строкой, в которой последовательно указываются числа a, n, m, l, r ($1 \leqslant a \leqslant 100$, $1 \leqslant n \leqslant 10$, $1 \leqslant m \leqslant 10^5$, $1 \leqslant l \leqslant r \leqslant 10^{18}$).

Формат выходных данных

Для каждого набора входных данных выведите единственное число — значение суммы.

Пример

стандартный ввод	стандартный вывод
5 1 1 100 1 3 2 1 100 1 3 2 2 100 1 3 1 2 100 1 3 1 6 6 1 10	14 28 14 6 0

Замечание

В первом наборе входных данных ответ равен $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

В четвертом наборе входных данных $\lfloor\frac{1}{2}\rfloor + \lfloor\frac{4}{2}\rfloor + \lfloor\frac{9}{2}\rfloor = 0 + 2 + 4 = 6$.

В пятом наборе входных данных сумма равна $\lfloor\frac{1}{6}\rfloor + \lfloor\frac{4}{6}\rfloor + \ldots + \lfloor\frac{100}{6}\rfloor = 60$.

Задача L. Маткульт-привет!

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Маткульт-привет!

Алексей Савватеев

Сегодня на очередном занятии в математическом кружке, посвященном теории чисел, Сережа узнал много новых для него интересных функций. В частности, ему очень понравилась функция $\varphi(n)$, которая определяется следующим образом: $\varphi(n)$ равно количеству натуральных чисел, не превосходящих n, *взаимно-простых* с n. Эта функция показалась Сереже очень красивой, так как на занятии он узнал несколько ее замечательных свойств. Например, для любых *взаимно-простых* чисел a и b верно, что $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Напомним, что натуральные числа a и b называются *взаимно-простыми*, если их наибольший общий делитель равен единице. Например, числа 5 и 8 являются взаимно-простыми, а числа 12 и 9 — нет (их наибольший общий делитель равен 3).

Приведем некоторые примеры значений функции $\varphi(n)$:

- $\varphi(5) = 4$ (натуральные числа, не превосходящие 5, взаимно-простые с 5: $1, 2, 3, 4$),
- $\varphi(1) = 1$ (существует всего одно натуральное число, не превосходящее 1 — само число 1),
- $\varphi(6) = 2$ (натуральные числа, не превосходящие 6, взаимно-простые с 6: $1, 5$).

Сережа очень любит натуральные числа из промежутка $[l, r]$, то есть числа $l, l+1, \ldots, r$. Начинающему математику тут же захотелось исследовать поведение функции $\varphi(n)$ на промежутке $[l, r]$.

Сережа хочет найти такое натуральное число x, что $l \leqslant x \leqslant r$, а также $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$ для любого натурального числа $l \leqslant y \leqslant r$. Так как Сережа является начинающим математиком, он не справился с этой задачей, поэтому решить ее придется вам.

Формат входных данных

Единственная строка содержит два натуральных числа l и r ($1 \leqslant l \leqslant r \leqslant 10^{12}$).

Формат выходных данных

Выведите одно натуральное число x, для которого верно, что $l \leqslant x \leqslant r$, а также $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$ для любого натурального числа $l \leqslant y \leqslant r$.

Если существует несколько подходящих чисел x, выведите любое из них.

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
1 6	5
10 10	10
14 16	16

Замечание

В первом примере значения функции $\varphi(n)$ для всех натуральных чисел из промежутка $[1, 6]$ равны: $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$.

Во втором примере 10 — единственное натуральное число из промежутка $[10, 10]$.

В третьем примере можно вывести в качестве ответа числа 15 или 16, так как $\varphi(14) = 6$, а $\varphi(15) = \varphi(16) = 8$.

Задача M. Резонансные частоты

Имя входного файла:	`стандартный ввод`
Имя выходного файла:	`стандартный вывод`
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

В солнечной системе в далеком будущем люди смогли заселить n планет (включая искусственно созданные), между которыми для экстренных случаев они наладили радиосвязь.

Радиосвязь представляет собой набор из m односторонних каналов связи, i-й канал передает информацию из планеты с номером v в планету с номером u, при этом работая на частоте i. В силу жесткой иерархии планет в построенной системе радиосвязи нет циклов.

Потом случилось страшное — людей нашли пришельцы, которые стали посылать свои сигналы в солнечную систему на частоте x. Таким образом некоторые пути передачи информации начали резонировать с сигналами пришельцев.

Пусть какой-то путь проходит через вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ($k \geqslant 2$) и пару вершин (v_i, v_{i+1}) соединяет ребро e_i. Тогда такой путь резонирует с сигналом, если наибольший общий делитель чисел $e_1, \ldots, e_{k-1}$ в точности равен x.

Люди хотят понять, какое количество путей подверглось угрозе, но вычисления оказались слишком громоздки. Поэтому они просят вас помочь спасти человечество и вычислить количество резонирующих путей по модулю $10^9 + 7$.

Формат входных данных

В первой строке заданы три числа n, m, x — количество планет, количество каналов радиосвязи и частота сигнала пришельцев.

В последующих m строках указано по паре чисел v_i и u_i — концы i-го канала радиосвязи.

$$2 \leqslant n \leqslant 10^5$$

$$1 \leqslant m \leqslant 10^5$$

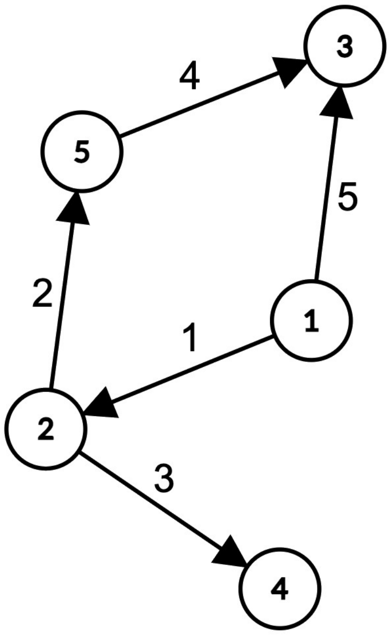
$$1 \leqslant x \leqslant m$$

$$1 \leqslant v, u \leqslant n$$

Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
5 5 1 1 2 2 5 2 4 5 3 1 3	4
5 5 2 1 2 2 5 2 4 5 3 1 3	2

Замечание



В первом примере подходят пути, проходящие по вершинам $[1,2]$, $[1,2,4]$, $[1,2,5]$, $[1,2,5,3]$.
Во втором примере подходят только пути $[2,5]$ и $[2,5,3]$.